

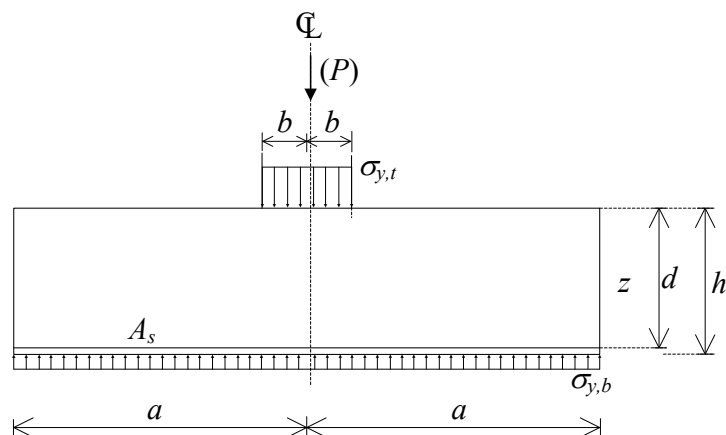
Model for bæreevne, spændingsfordeling og forankringskrav i tværarmerede stribefundamenter

Lars German Hagsten

Introduktion

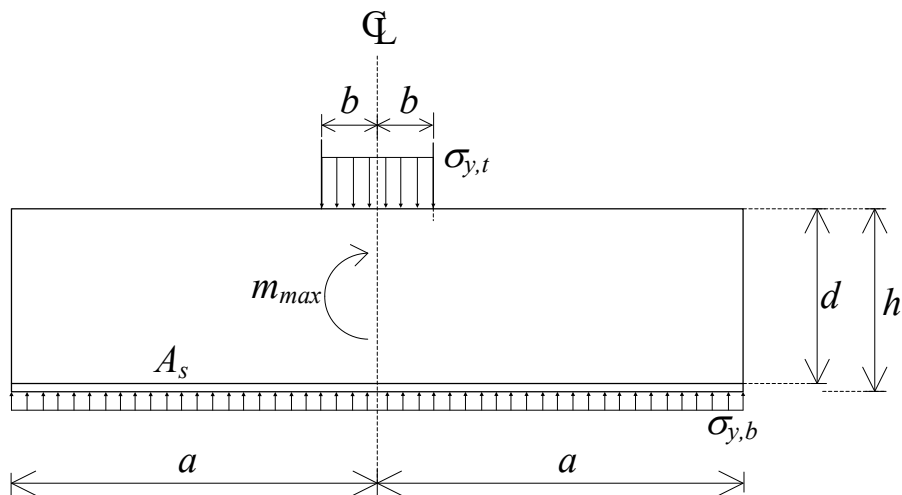
For stribefundamenter med et bredde/højde-forhold, der nødvendiggør tværgående armering, præsenteres i dette notat en beregningsmodel, som kan anvendes til at bestemme den krævede tværarmering, kontrollere den maksimale betontrykspænding samt vurdere behovet for forankring af armeringen ved fundamentets rand.

Figur 1 viser et tværsnit af et stribefundament med bredden $2a$ og højden h , der understøtter en centralt placeret væg med bredden $2b$. Væggens last, P , omregnes til en jævnt fordelt belastning $\sigma_{y,t}$, som virker på fundamentets overside. Reaktionen under fundamentet antages ligeledes jævnt fordelt og betegnes $\sigma_{y,b}$. I figuren er desuden vist den tværgående armering A_s , som anvendes til at bestemme bjælkens effektive højde ved positivt moment, d .



Figur 1 Definition af geometri, model af belastning og reaktion, samt placering af tværgående armering.

Det maksimale moment, m_{max} , optræder i midtertværsnittet. Dette er illustreret i figur 2.

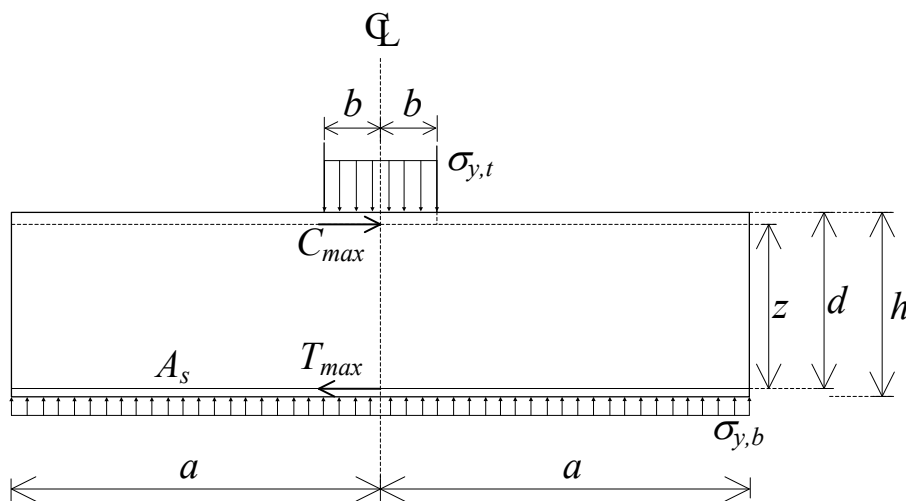


Figur 2 Det maksimale tværgående moment

Det maksimale moment findes i centerlinien:

$$m_{max} = \frac{1}{2} a^2 \cdot \sigma_{y,b} - \frac{1}{2} b^2 \cdot \sigma_{y,t} = \frac{1}{2} a(a-b) \sigma_{y,b} \quad (1)$$

Dette moment omregnes til et kraftpar, C_{max} henholdsvis T_{max} , med indbyrdes afstand z , se figur 3.



Figur 3 Ækvivalent kraftpar

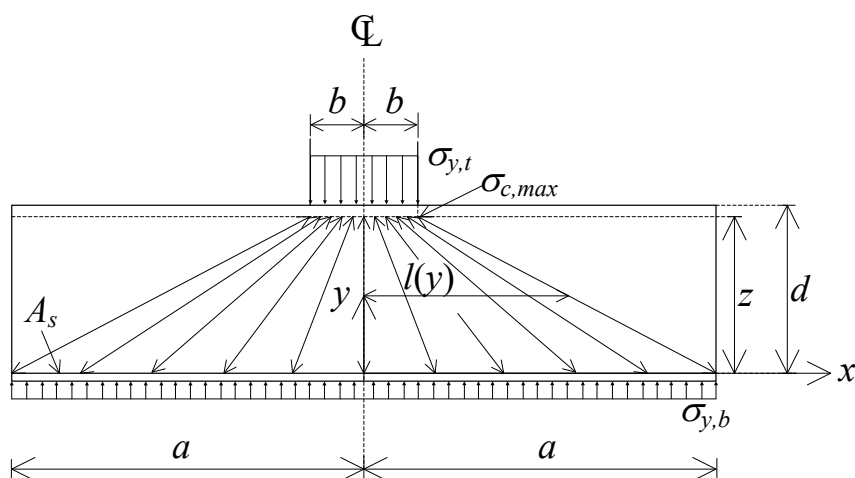
$$T_{max} = C_{max} = \frac{m_{max}}{z} = \frac{a(a-b)}{2z} \sigma_{y,b} \quad (2)$$

hvor

$$z = d - \frac{A_s \cdot f_{yd}}{2f_{cd}} \quad (3)$$

Modelling

Spændingsfordelingen i stribefundamentet modelleres ved en vifteformet spændingsfordeling med en konstant lodret spænding i vandrette snit. Spændingsfordelingen er illustreret i figur 4.



Figur 4 Vifteformet spændingsfordeling. En vifte

I vandrette snit er der konstant lodret spænding (uafhængig af x):

$$\sigma_y = \frac{a}{a - \frac{(a-b)}{z}y} \sigma_{y,b} \quad (4)$$

hvor

$$z = d - \frac{A_s \cdot f_{yd}}{2 \cdot f_{cd}} \quad (5)$$

Sammenhængen mellem normalspændingen givet ved formel (4) og forskydningsspændingen er givet ved:

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (6)$$

Det betyder, at forskydningsspændingen er givet ved:

$$\tau_{xy} = \frac{z \cdot a \cdot (a-b)}{(b^2 - 2 \cdot a \cdot b + a^2) \cdot y^2 + 2 \cdot a \cdot z \cdot (b-a) \cdot y + a^2 \cdot z^2} \cdot x \cdot \sigma_{y,b} \quad (7)$$

Sammenhængen mellem den normalspændingen i lodrette snit, σ_x , og forskydningsspændingen er givet ved:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (8)$$

Dermed er σ_x givet ved:

$$\sigma_x = \frac{z \cdot a \cdot (b-a)^2}{(-(a-b) \cdot y + a \cdot z)^3} \cdot x^2 \cdot \sigma_{y,b} \quad (9)$$

Med hensyn til ligevægtsligninger for skiver se [1].

Den største tryknormalspænding er beliggende i toppen, yderst ved belastning: $(x,y) = (b,z)$, se figur 4. Denne maksimale hovedspænding er givet ved:

$$\sigma_{c,max} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \sqrt{\left(\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (10)$$

$$\sigma_{c,max} = \frac{a}{b} \left(1 + \frac{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b}{z^2}\right) \sigma_{y,b} = \left(1 + \frac{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b}{z^2}\right) \sigma_{y,t} \quad (11)$$

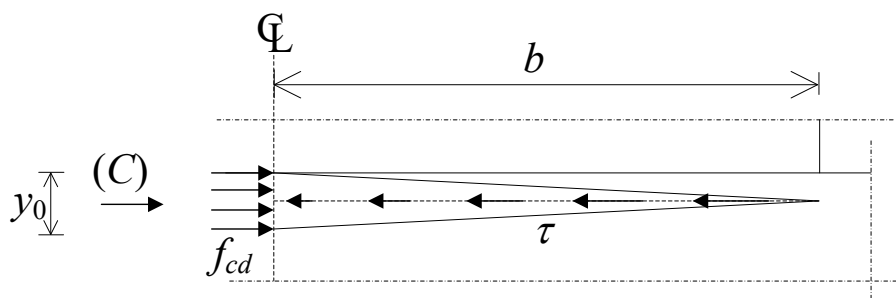
Da:

$$P = \sigma_{y,t} \cdot 2b \rightarrow \sigma_{y,t} = \frac{P}{2b} \quad (12)$$

kan $\sigma_{c,max}$ udtrykkes ved:

$$\sigma_{c,max} = \left(1 + \frac{(a-b)^2}{z^2}\right) \frac{P}{2b} \quad (13)$$

Ved trykresultanten (C) kan en lokal modeldannelse som illustrere, at forskydningsspændingen langs den øvre afgrænsning er i ligevægt med trykresultanten, se figur 5.



Figur 5 Illustration af hvorledes forskydningsspænding omdannes til tryk i toppen af fundamentet

Denne lokale spændingsfordeling giver spændinger på tværs (tillæg til σ_y) i denne trekant. Med typiske værdier af y_0 henholdsvis b er størrelsen på disse tillæg til σ_y meget begrænsede og ignoreres i det følgende.

Trykzonens højde:

$$y_0 = \frac{c}{v f_{cd}} \quad (14)$$

På grund af vandret ligevægt gælder, at $C = T_{x,max}$.

Variationen af normalkraften i armeringen er givet ved:

$$T_x(y=0) = \int_x^a \tau_{xy}(y=0) dx \quad (15)$$

$$T_x(y = 0) = \frac{(a-b) \cdot (a^2 - x^2)}{2 \cdot a \cdot z} \sigma_{y,b} \quad (16)$$

Største trækraft fås for $x = 0$:

$$T_{x,max}(y = 0) = \frac{(a-b) \cdot a}{2 \cdot z} \sigma_{y,b} \quad (17)$$

Det ses at være identiske med det træk som blev bestemt i formel (2) ud fra m_{max} .

$T_{x,max}$ udtrykt ved P :

$$T_{x,max}(y = 0) = \frac{(a-b)}{4 \cdot z} P \quad (18)$$

Tilvæksten af T_x bestemmes:

$$\frac{dT_x}{dx} = \frac{(a-b) \cdot x}{a \cdot z} \sigma_{y,b} \quad (19)$$

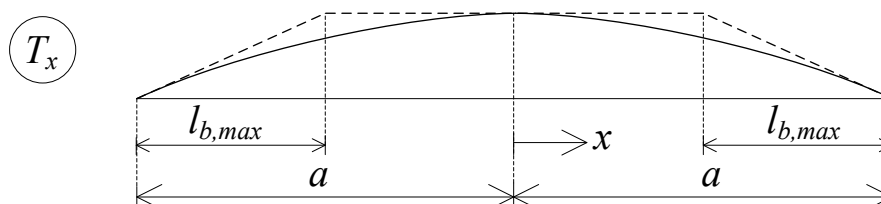
Med en lineær tilvækst af forankringen bestemmes den maksimale forankringslængde, $l_{b,max}$, for at kunne undgå opbukning af armeringen ved kanten. Den største værdi af tilvæksten fås ved kanten af fundamentet, $x = a$.

Den maksimale forankringslængde, $l_{b,max}$, for at kunne undgå opbukning af armeringen ved kanten bestemmes derfor af:

$$T_{x,max}(y = 0) = \frac{dT_x}{dx}(x = a) \cdot l_{b,max} \quad (20)$$

$$l_{b,max} = \frac{1}{2} \cdot a \quad (21)$$

Dette er illustreret i figur 6.



Figur 6 Fuldt optrukken linje: Variation af trækraft i værarmering. Stiplet linje: Kapacitet af tværarmering

Såfremt forankringslængden for den anvendte armering er større end givet ved formel (21) kan man enten forankre armeringen ved randen eller indsætte forankringslængden for den anvendte armering i formel (20) og bestemme den kraft, der skal armeres for (T_x).

Delsammenfatning 1

I denne artikel er der præsenteret en beregningsmodel til bestemmelse af bæreevnen for et stribefundament, der på tværs alene er forsynet med armering i undersiden. Modellen baserer sig på en idealiseret vifteformet spændingsfordeling, som gør det muligt at

bestemme både den nødvendige tværgående armeringsmængde og den maksimale betontrykspænding i fundamentet. Spændingerne fremgår af formlerne (4), (7) og (9).

Der er desuden opstillet en betingelse for armeringens forankring, som i de fleste tilfælde betyder, at armeringen ikke behøver at blive forankret ved fundamentets rand.

Armeringsdimensionering:

Den maksimale trækraft i den tværgående armering, $T = A_s f_{yd}$, bestemmes efter formel (18).

Betontryk:

Den maksimale hovedtrykspænding optræder i fundamentets overside under væggenes kanter og beregnes efter formel (13). Det skal verificeres, at denne spænding ikke overstiger betonens effektive trykstyrke νf_{cd} . Den anvendte spændingsmodel sikrer, at der udelukkende optræder trykspændinger i betonen; den ene hovedspænding er overalt tryk, den anden er nul.

Forankringslængde:

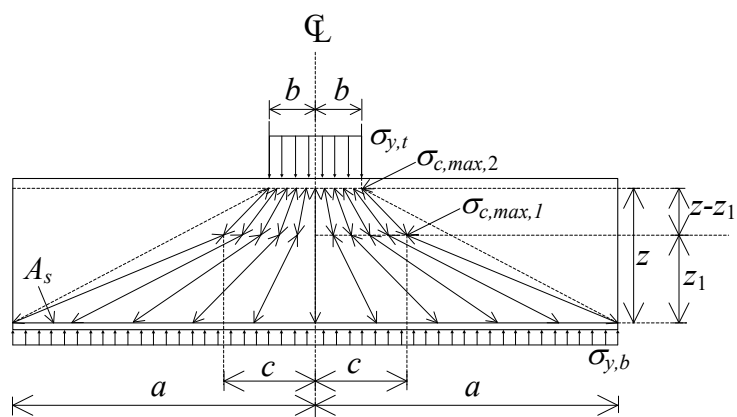
Trækraften i armeringen varierer parabolisk med maksimal tilvækst ved fundamentets rand. Forankringen er tilstrækkelig uden opbukning, hvis armeringens forankringslængde ikke overstiger 25 % af fundamentets fulde bredde.

Model med to eller flere lag af vifter

I nogle tilfælde viser det sig, at den maksimale hovedspænding, $\sigma_{c,max}$, beregnet efter formel (13), bliver dimensionsgivende i den ovenfor beskrevne model. Den kritiske hovedspænding optræder i fundamentets overside ved væggenes kanter. Dette skyldes, at den lodrette normalspænding her er størst på grund af den begrænsede vandrette udstrækning under væggen, kombineret med at spændingsretningen netop ved kanterne har den største hældning.

For at reducere denne kritiske spænding kan fundamentet opdeles i to eller flere vifter. En model med to vifter er vist i figur 7.

Den øverste vifte får herved en mindre hældning og dermed en lavere maksimal hovedspænding. Den nederste vifte får derimod en større hældning, men samtidig en lavere lodret normalspænding, idet $c > b$. I modsætning til modellen med én vifte introducerer denne opdeling to ubekendte, som skal bestemmes ved optimering. Formålet er at minimere armeringsbehovet under forudsætning af, at de maksimale hovedspændinger i begge vifter er mindre end eller lig med betonens effektive trykstyrke.



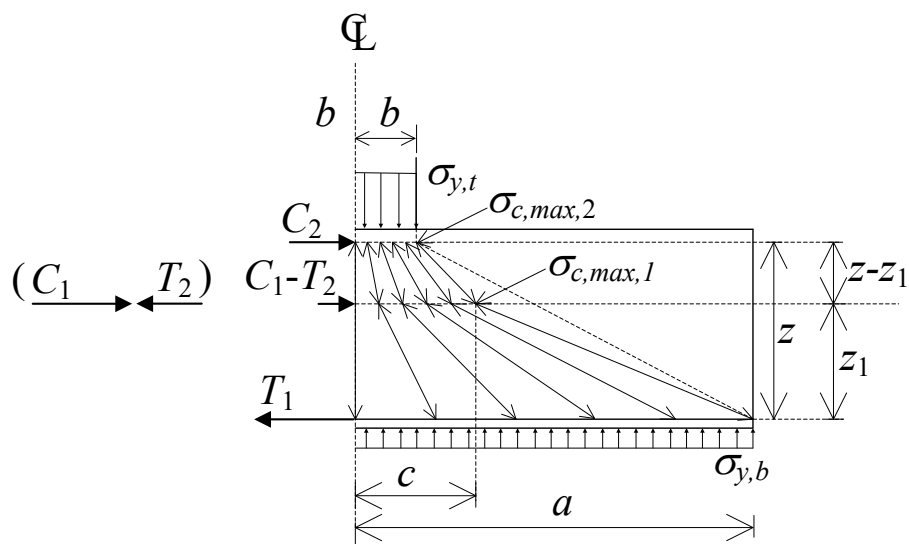
Figur 7 Vifteformet spændingsfordeling. To vifter

Formlerne for de to maksimale hovedspændinger kan opstilles direkte ud fra formel (13), idet den specifikke geometri for hver vifte indarbejdes:

$$\sigma_{c,max,1} = \left(1 + \frac{(a-c)^2}{z_1^2}\right) \frac{P}{2c} \quad (22)$$

$$\sigma_{c,max,2} = \left(1 + \frac{(c-b)^2}{(z-z_1)^2}\right) \frac{P}{2b} \quad (23)$$

I figur 8 ses halvdelen af fundamentet med påsatte snitkræfter ved centerlinjen.



Figur 8 Halvdelen af fundamentet med påsatte snitkræfter ved centerlinjen. To vifter

Størrelserne på resultanterne er givet ved:

$$T_1 = C_1 = \frac{(a-c)}{4z_1} P \quad (24)$$

$$T_2 = C_2 = \frac{(c-b)}{4(z-z_1)} P \quad (25)$$

Der foretages kontrol af momentligevægt. Momentligevægt om trækarmring:

$$m = (C_1 - T_2) \cdot z_1 + C_2 \cdot z \quad (26)$$

$$m = \left(\frac{(a-c)}{4z_1} P - \frac{(c-b)}{4(z-z_1)} P \right) \cdot z_1 + \frac{(c-b)}{4(z-z_1)} P \cdot z \quad (27)$$

$$m = \frac{1}{4} \left(\frac{(a-c)(z-z_1) - (c-b)z_1 + (c-b)z}{(z-z_1)} \right) P \quad (28)$$

$$m = \frac{1}{4} (a - b) P \quad (29)$$

Dette stemmer med formel (1), idet $\sigma_{y,b} = \frac{P}{2a}$.

For flere end to vifter er tilgangen helt analogt. For hver vifte som tilføjes kommer der to nye ubekendte (analogt til c og z_1) som skal indgå i optimeringen.

Delsammenfatning 2

I tilfælde hvor $\sigma_{c,max}$ givet ved formel (13) overskrider betonens effektive styrke indedeles fundamentet i to (eller flere) lag, se figur 7, hvor der er vist en opdeling i to lag/to vifter. Denne model indeholder to ubekendte, c og z_1 , der bestemmes ved at minimere armeringsbehovet, givet ved størrelsen på T_1 , (24) kombineret med de restriktioner at både $\sigma_{c,max,1}$ (22) og $\sigma_{c,max,2}$ (23) ikke overskrider betonens effektive trykstyrke. Inddelingen i to lag medfører et højere armeringsbehov sammenlignet med modellen med en vifte, da den gennemsnitlige indre momentarm reduceres. Krav til forankringslængde er uændret.

Hvis den maksimale hovedtrykspænding $\sigma_{c,max}$ bestemt efter formel (13) overstiger betonens effektive trykstyrke, kan spændingsmodellen udvides ved at opdele fundamentet i to vifter, jf. figur 7. Denne model introducerer to ubekendte, c og z_1 , som bestemmes ved optimering. Målet er at minimere armeringsbehovet, samtidig med at følgende krav er opfyldt:

- den maksimale hovedtrykspænding i den øverste vifte, $\sigma_{c,max,1}$, jf. formel (22), skal være mindre end eller lig νf_{cd}
- den maksimale hovedtrykspænding i den nederste vifte, $\sigma_{c,max,2}$, jf. formel (23), skal være mindre end eller lig νf_{cd}

Inddelingen i to vifter reducerer hældningen i den øverste vifte og dermed den kritiske hovedspænding, men medfører en lavere gennemsnitlig momentarm. Dette resulterer i et øget armeringsbehov sammenlignet med modellen med én vifte. Kravene til forankringslængde er uændrede i forhold til delssammenfatning 1.

Optimeringen vil normalt føre til, at $\sigma_{c,max,1} = \sigma_{c,max,2} = \nu f_{cd}$, da maksimal udnyttelse af betonens trykstyrke samtidig giver det lavest mulige armeringsbehov.

Såfremt der ikke kan findes en løsning med to vifter kan der indføres/underinddeles i yderligere lag/vifter. For hver vifte som tilføjes kommer der to nye ubekendte (analogt til c og z_1) som skal indgå i optimeringen.

Sammenfatning

Ved styrkeeftervisning af sribefundamenter med behov for tværgående armering anvendes først den metode, der er beskrevet i delssammenfatning 1. Her bestemmes armeringsbehov, betontryk og forankringskrav ud fra en enkelt vifteformet spændingsfordeling.

Hvis denne model ikke kan overholde betons trykstyrke på grund af for høje hovedspændinger, anvendes modellen med to vifter som beskrevet i delssammenfatning 2. Her gennemføres en optimering af vifternes geometri for at sikre, at begge vifter overholder kravene til betontryk, samtidig med at armeringsbehovet minimeres.

Dermed giver artiklen en samlet procedure for dimensionering og styrkeeftervisning af tværarmerede sribefundamenter, både i tilfælde hvor en enkelt vifte er tilstrækkelig, og i tilfælde hvor en todelt spændingsmodel er nødvendig.

Litteratur:

[1] Nielsen, M. P. and L. C. Hoang: Limit Analysis and Concrete Plasticity. CRC Press LLC. 2010

Reproduction without reference to source is not permitted

Copyright © 2025”Danish Society for Structural Science and Engineering”, Copenhagen

ISSN 1601-6548 (online)